

# GNSS における RAIM 補強の理論とアルゴリズム

坂井 丈泰\*

## Theory and Algorithms of RAIM Augmentation for GNSS

Takeyasu SAKAI

### Abstract

The satellite navigation system for civil aviation must ensure to provide position information with the required integrity as well as position accuracy. The ICAO (International Civil Aviation Organization) defines GNSS (global navigation satellite system) as the satellite navigation system eligible to be used for civil aviation, which means GPS and GLONASS, operated by the US and Russia, respectively, with the appropriate augmentation necessary to achieve required performance in terms of integrity. Currently SBAS (satellite-based augmentation system), GBAS (ground-based augmentation system), and ABAS (airborne-based augmentation system) are defined as the augmentation system.

For SBAS and GBAS, it is possible to evaluate the performance of GNSS over the service area based on a geometry of GPS (or GLONASS) satellites and augmentation information because the international standards specify both the contents and usage of augmentation information. On the other hand, for ABAS, the international standards specify neither particular algorithm nor parameter set. This paper aims to describe theory and algorithms of ABAS, so that it is possible to evaluate the performance of GNSS with ABAS anywhere and anytime. The author reports an investigation of the baseline RAIM (receiver autonomous integrity monitoring) algorithm implemented almost commonly for certified airborne GNSS receivers equipped with ABAS function. Some parameter sets are also given and evaluated in terms of performance and the examples of response to anomalous events of GPS satellite are shown.

---

\*航法システム領域

## 1. まえがき

衛星航法システムを民間航空機の航法に利用するためには、所要の精度をもって位置情報が提供されるとともに、十分な信頼性が確保されていなければならない。国際民間航空機関（ICAO：International Civil Aviation Organization）は、民間航空機の航法に使用可能な衛星航法システムを GNSS（global navigation satellite system）と定義し、米国の GPS（global positioning system）やロシアの GLONASS といったコアシステムに対して、必要な補強を施すことを求めている [1]。補強の方式としては、静止衛星を用いて大陸規模の広い範囲に補強情報を送信する SBAS（satellite-based augmentation system：静止衛星型衛星航法補強システム）、VHF 信号により空港周辺を対象として補強情報を提供する GBAS（ground-based augmentation system：地上型衛星航法補強システム）、そして機上装置により必要な補強を得る ABAS（airborne-based augmentation system：機上型衛星航法補強システム）が定義されており、いずれかの補強システムをコアシステムと組み合わせることで GNSS として機能させることとなる。

GNSS により得られる性能は、コアシステムとして利用できる航法衛星の数や幾何学的配置に左右され、常に一定というわけではない。従って、GNSS による航空機の運航に際しては、空域管理者の立場からも、また航空機運航者の立場からも、GNSS の利用可能性（アベイラビリティ）をあらかじめ評価するとともに、これが十分でない場合は運航の都度 GNSS の利用の可否を確認する必要がある。SBAS 及び GBAS については国際標準により機上受信機の内部における補強情報の処理手順が詳細に規定されていることから、航法衛星の配置に関する情報や補強情報が得られれば日本全国を対象としてこうした評価を実施でき、一般に十分なアベイラビリティを期待できる。

一方、ABAS については国際標準により特定の処理方式（アルゴリズム）が規定されているわけではない。ABAS についてアベイラビリティの評価や利用の可否の判断を行うには、その処理方式を明確化することが必要である。このため、現在のところ航空機搭載用に認証された受信機が ABAS 機能として実装している RAIM（receiver autonomous integrity monitoring）方式について、公表されている資料を参考にしてベースラインとなるアルゴリズムを調査・整理し、本報告として取りまとめた。以下、第 2 章では現行の規定における GNSS 航法の概要を紹介する。第 3 章及び第 4 章にて RAIM 方式の詳

細を述べるとともに性能評価例を示し、第 5 章を全体のまとめとする。

## 2. GNSS による航法

我が国において航空機の計器飛行による運航に使用する GPS/ABAS（本報告においては、例えば ABAS により補強された GPS を「GPS/ABAS」と表記し、その他の補強方式についてもこれにならうこととする）受信機は、FAA の技術基準 TSO-C129[2]、TSO-C145/146[3][4]、あるいは TSO-C196[5] に適合していなければならない。これらの技術基準で規定されている RAIM 方式について述べる。なお、FAA の技術基準には対応する RTCA 規格があり、それらの関係は表 1 のように整理できる。

### 2.1. GNSS の利用

航空機の航法のための航行援助施設は航空法施行規則（昭和 27 年 7 月 31 日運輸省令第 56 号）第 97 条で航空保安無線施設として定められているが、米国が運用している GPS はこれに含まれていない。GPS の利用は、航空局技術部長通達「GPS を計器飛行方式に使用する運航の実施基準」（平成 9 年 11 月 25 日、平成 30 年 3 月 30 日最終改正）により認められている。ただし、この場合にも GPS を補強せずに利用することは許されており、計器飛行方式に使用する GPS 受信機は適切な補強により GPS 衛星の異常を検出する機能（完全性：integrity）を備えなければならない。また、GBAS を使用する場合を除き、水平方向の航法しか利用できない。

静止衛星を使用して補強情報を提供する SBAS については、我が国においては MSAS（MTSAT satellite-based augmentation system、最近 Michibiki-based に変更されている）を整備・運用してきた。MSAS は日本全国にわたり所要の完全性を提供するとともに測位精度の改善を図る機能を持ち、現在は準天頂衛星システムの静止衛星 QZS-3 を使用して運用されている。GPS/SBAS 受信機については FAA による技術基準 TSO-C145 又は TSO-C146 を満たすこととされており、GPS 信号とあわせて SBAS 信号を受信し、SBAS の補強情報にもとづいて完全性を確保する。

補強情報の伝送に VHF 信号を用いる GBAS については、羽田空港にて試験運用が実施されている。対応する GPS/GBAS 受信機は、FAA の技術基準 TSO-C161[6] を満たすことが要求されている。

一方、機上装置により GPS を補強して所要の性能を得るのが GPS/ABAS 方式で、このための手段の一つが RAIM である。RAIM の詳細は次章に述べる通りで、基

表 1 補強システムと対応受信機の関係

主とする補強システム	FAA 技術基準	RTCA 規格	RAIM 方式	用途	特徴
ABAS	TSO-C129	DO-208	FD	補助航法装置	SA あり
	TSO-C196	DO-336	FDE	主航法装置	SA なし
SBAS	TSO-C145	DO-229	FDE	主航法装置	SA なし, スタンドアロン型
	TSO-C146				SA なし, センサ型
GBAS	TSO-C161	DO-253	—	主航法装置	RAIM なし

本的には冗長な GPS 衛星の測定データを用いてその整合性を検査することで不具合を検出する。GPS/SBAS や GPS/GBAS と比べると、地上施設による監視ではないことから監視性能はそれほど高くない（後述の保護レベルが相対的に大きくなる）。航空機搭載用 GPS/RAIM 受信機については、FAA の技術基準 TSO-C129 又は TSO-C196 に適合しなければならない。また、TSO-C145/146 に適合する GPS/SBAS 受信機は、SBAS 信号を受信できない場合は RAIM 機能により完全性を確保することが規定されている。TSO-C161 による GPS/GBAS 受信機には、RAIM 機能はない。

RAIM によりいずれかの GPS 衛星に異常があることを検出する機能を RAIM-FD (fault detection) という。RAIM-FD では異常を生じている衛星は特定されないの、異常が検出された場合は GPS/RAIM による航法を中断するより他にない。異常が検出された場合にその原因となっている衛星を特定し、これを除外する機能を FDE (fault detection and exclusion) といい、RAIM-FDE であれば異常を検出した場合でも GPS/RAIM による航法を継続できる。

なお、我が国においては、GNSS の利用にあたり、(i) 代替経路で利用可能な航法手段があること、(ii) 衛星航法以外の航法手段との比較・監視をすること、といった条件が飛行フェーズに応じて課されている。さらに、GPS/ABAS (GPS/RAIM を含む) では、ABAS 機能のオペラビリティが低いことから、航空路や目的地における ABAS 機能の利用の可否の予測が求められることがある（一般に RAIM 予測と呼ばれる）。

## 2.2. 航法の完全性

完全性は、衛星航法システムを利用すべきでない場合に利用者にそのことを警報する機能と定義される。航法衛星が送信する測距信号に含まれるアラート情報を参照することは、完全性の第一の実装といえる。ただし、利用者によって異なる性能要件に柔軟に対応できないこと、また大気遅延の影響を反映できず、警報に要する時

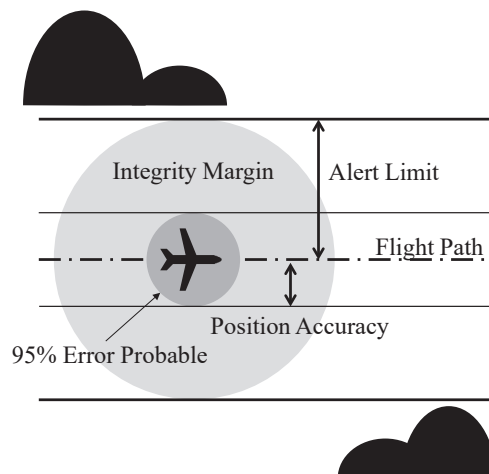


図 1 警報限界による障害物との離隔

間（警報時間, TTA: time to alert) も小さくないことから、航空分野においては警報限界 (alert limit) を定めて対応する方式が標準化されている。警報限界は利用者側の飛行フェーズによって定められ、図 1 に示すように周囲の障害物との位置関係を反映する。航法システムは、基本的に警報限界を超える位置誤差を生じてはならない。

RAIM の主要な機能は GPS 衛星の異常の検出であるが、異常が検出されていない通常状況下においては（あらかじめ定められた未検出確率のもとで）測位誤差が警報限界を超えないことを保証する必要がある。従って、(i) 利用可能な衛星数が不足している、(ii) いずれかの衛星に異常が検出されている、(iii) 警報限界を超える測位誤差を生じている可能性がある、のいずれかが生じている場合は GPS/RAIM を利用すべきでない。

このような完全性に対する要請は、ICAO に設置されていた AWOP (All Weather Operation Panel: 全天候運航パネル) における議論が基礎となっている。安全性に直接関係する完全性と継続性については、目標安全度 (TLS: Target Level of Safety) を頂点とする故障木解析にもとづいて設定されている [7]。

表 2 GPS/RAIM 受信機の完全性

飛行フェーズ	警報限界 [m]	TSO-C129 (RTCA DO-208)			TSO-C145/146/196 (RTCA DO-229/316)		
		誤警報確率*	警報時間	検出確率	誤警報確率	警報時間	検出確率
航空路	3704	$6.667 \times 10^{-5}$	30 s	0.999	$3.33 \times 10^{-7}$	8 s	0.999
ターミナル	1852	$6.667 \times 10^{-5}$	10 s	0.999	$3.33 \times 10^{-7}$	8 s	0.999
非精密進入	556	$6.667 \times 10^{-5}$	10 s	0.999	$3.33 \times 10^{-7}$	8 s	0.999

\*誤警報確率はサンプル当たりに換算してある。

### 2.3. 技術基準 TSO-C129 の概要

GPS を補助航法装置として使用するための基準である TSO-C129 は RTCA による標準規格 DO-208[8] を参照しており、受信機は RAIM-FD 機能をもつこととされている。DO-208 規格では受信機に対する要求事項は第 2 章に規定されており、完全性については表 2 の通り、警報限界及び警報時間のほか、誤警報確率 (false alarm rate) の最大値や検出確率 (detection probability) の最小値が規定されている。

GPS 信号については SA (selective availability : 選択利用性) を想定するものとされ、擬似距離の測定精度は  $\sigma_s = 33.3\text{m}$  とされている。RAIM 機能を実現する具体的な方法については任意とされているが、規定の試験手順にて検証される必要があり、また付録 F には大筋の計算方式が記載されている。GPS 衛星を選択する基準として仰角マスクは規定されていないが、実際の受信機では 2 ~ 7.5 度の範囲で設定されている。

実際に GPS 衛星に異常があることは稀なので、GPS/RAIM 受信機が RAIM 機能により警報を出すのは誤警報であることが多い。誤警報を生じると航法を中断することになるから、許容できる誤警報確率の最大値が定められている。RAIM 機能の設計上は、GPS 信号について一定の仮定のもとで誤警報確率の最大値が与えられると、検出器のスレッシュホールドを定めることができる。一般に、GPS 信号について想定する測距誤差が大きいほど、また誤警報確率が小さいほど、検出器のスレッシュホールドは大きくなる。DO-208 では誤警報確率は 0.002/h と定められているが、30 秒の時定数を想定し、相関のないサンプル当たりでは  $6.667 \times 10^{-5}$  と注記されている。なお、誤警報確率は継続性 (continuity) として要求されることもある (誤警報を生じない時間当たりの確率が継続性である) [1]。

実際に GPS 信号に異常があった場合は、規定された検出確率以上の確率でこれを検出しなければならない。検出器のスレッシュホールドと検出確率の要求値から、検出可能な測位誤差の最小値が得られる。このような指標が

3.4 節 ~ 3.5 節で説明する保護レベル (protection level) であり、保護レベルが警報限界を超えたならば (このことは、警報限界を超える大きさの測位誤差が要求された検出確率をもって検出されないことを意味する)、受信機は警報を出すことで GPS/RAIM による航法が利用できないことを利用者に知らせる。

### 2.4. 技術基準 TSO-C145/146 の概要

技術基準 TSO-C145 及び TSO-C146 が参照している RTCA 規格は、DO-229[9] である。TSO-C145 は TSO-C129 と同様のスタンドアロン型受信機 (ディスプレイやデータベースを備え、単体で利用者に航法を提供できるもの) に関する基準、TSO-C146 はセンサ型受信機 (位置情報の出力のみを行うもので、ディスプレイ等のインターフェースは備えていない) についての基準である。これらはいずれも SBAS 対応受信機の規格であり、DO-229 準拠の受信機は SBAS 信号を受信・処理する機能をもつとともに、RAIM-FDE 機能も有することとされている。すなわち、これは GPS を主航法装置として使用するための基準である。

DO-208 と同様であるが、DO-229 においても完全性に関する要件が定められており、表 2 の通りとされている。GPS 信号については SA を想定する必要はなく、擬似距離の測定精度  $\sigma_s$  は 10m 前後に設定される。GPS 衛星の仰角マスクは 5 度とされることが多いが、垂直ガイダンスのない航法モードでは最低 2 度まで許容される。

### 2.5. 技術基準 TSO-C196 の概要

技術基準 TSO-C196 が参照している RTCA 規格は、DO-316[10] である。DO-316 は基本的に DO-229 から SBAS 対応部分を除いたものであり、完全性のための機能としては RAIM-FDE のみが残っている。すなわち、TSO-C196 は GPS を主航法装置として使用するための基準である。DO-229 と同様、GPS 信号について SA は想定しなくてよい。

### 3. RAIM アルゴリズム

GPS 衛星同士の測定値の整合性を検査することで不具合を検出するためには様々な方式が考えられる。TSO-C129/C145/C146/C196 対応受信機で採用されている RAIM 方式についてベースラインとなるアルゴリズムを整理すると、以下の通りである [11]-[19]。

#### 3.1. 検出器の構成

整合性の検査には、異常衛星がある、すなわち測定された距離に不整合がある場合にそのことを検出する検出器を構成する必要がある。このためには、不整合がある場合に大きな値となる統計量を選び、これを適切に定めたスレッショルドと比較することで異常衛星の有無を判断する。

GPS 受信機は、複数の GPS 衛星と受信機自身との間の距離を測定し、これをもとに受信機の現在位置を計算する。測定された距離情報は擬似距離 (pseudorange) と呼ばれ、受信機位置と擬似距離の関係を表す方程式は次の通りである。

$$\mathbf{y} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

ここで、 $n$  次元ベクトル  $\mathbf{y}$  は擬似距離、4 次元ベクトル  $\mathbf{x}$  はユーザ受信機の位置及びクロック誤差、 $n$  次元ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は擬似距離の測定誤差を表し、 $n$  は測位に使用する衛星の数である。受信機位置から見た衛星の配置を表現する  $n \times 4$  行列  $\mathbf{G}$  は各衛星の視線方向ベクトルから構成され、

$$G_i = [-\sin A_i \cos E_i \quad \cos A_i \cos E_i \quad -\sin E_i \quad 1] \quad (2)$$

である。 $A_i$  は衛星  $i$  の方位角、 $E_i$  は同じく仰角を意味する。式 (1) は受信機位置の周りで線形化されており、原点は受信機位置の付近で適当に選んでよい。また、擬似距離を表す  $\mathbf{y}$  は、受信機が測定した擬似距離に対して衛星クロック補正及び大気遅延補正を施したのち、さらに衛星との間の距離を減じてある。各衛星の位置については、衛星自身が放送した軌道情報 (エフェメリス情報と呼ばれる) による。

擬似距離が  $\mathbf{y}$  であった場合、 $\mathbf{x}$  を最小二乗法により推定すると、

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{G})^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \quad (3)$$

と書ける。行列  $\mathbf{A}$  は擬似逆行列と呼ばれ、 $\mathbf{AG} = \mathbf{I}_4$  となる性質がある ( $\mathbf{I}_n$  は大きさ  $n \times n$  の単位行列をあらわす)。測定値の重みを表す  $n \times n$  行列  $\mathbf{W}$  は、それぞれの衛星

に関する測距精度を  $\sigma_i$  とすると、

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。

さて、式 (3) により推定された  $\hat{\mathbf{x}}$  に対応する擬似距離を求めると、

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (5)$$

のように得ることができる。これより、実際に測定された擬似距離  $\mathbf{y}$  に対するその推定値  $\hat{\mathbf{y}}$  の残差ベクトル  $\mathbf{e}$  が、次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \\ &= \mathbf{y} - \mathbf{GA} \cdot \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{GA}) \cdot \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{GA}) \cdot (\mathbf{G}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{GA}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6)$$

この関係を  $\mathbf{S} = \mathbf{I}_n - \mathbf{GA}$  を用いて整理すると、

$$\mathbf{e} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

となる。残差ベクトル  $\mathbf{e}$  から異常衛星を検出するためにはさまざまな統計量が考えられ得るが、RAIM 方式で用いられるのは次の残差二乗和である。

$$D^2 = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e} \quad (8)$$

異常衛星の有無は、この統計量  $D$  をスレッショルド  $T$  と比較することで判定する。すなわち、 $D \leq T$  であればすべての衛星は正常であり、 $D > T$  であればいずれかの衛星に異常があるものと判断する。

$n = 4$  の場合は  $\mathbf{AG} = \mathbf{GA} = \mathbf{I}_4$  となって常に  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  であるから、 $D$  を用いて異常衛星を検出することはできない。このことは、RAIM 方式では 5 機以上の衛星が必要であることを意味する。

なお、DO-208 では重み行列  $\mathbf{W}$  は使われておらず、すべての衛星について測距精度を  $\sigma_s = 33.3\text{m}$  と想定する。すなわち、 $\sigma_i = \sigma_s, \forall i = 1, \dots, n$  であるから、

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_n \quad (9)$$

として計算すればよい。DO-229 では式 (4) の重み行列を使うことが許容されており、例えば衛星の仰角や航法メッセージに含まれる URA (user range accuracy) を用

表3 衛星数とスレッシュホールドの関係

衛星数 $n$	$P_{fa}=6.667 \times 10^{-5}$ (DO-208)		$P_{fa}=3.33 \times 10^{-7}$ (DO-229/316)		
	$T(n)$ [m]	$T'(n)$ [m] <sup>*1</sup>	$T(n)$ [m]	$T'(n)$ [m] <sup>*2</sup>	$T'(n)$ [m] <sup>*1</sup>
5	3.9878	132.79	5.1037	66.348	169.95
6	4.3853	146.03	5.4617	71.002	181.87
7	4.6855	156.02	5.7385	74.601	191.09
8	4.9387	164.46	5.9752	77.678	198.97
9	5.1625	171.91	6.1862	80.421	206.00
10	5.3656	178.67	6.3790	82.927	212.42
11	5.5529	184.91	6.5577	85.250	218.37
12	5.7278	190.73	6.7252	87.428	223.95
13	5.8926	196.22	6.8835	89.485	229.22
14	6.0488	201.42	7.0339	91.441	234.23
15	6.1976	206.38	7.177	93.310	239.01
16	6.3401	211.12	7.3156	95.103	243.61
17	6.4770	215.68	7.4483	96.828	248.03
18	6.6090	220.08	7.5764	98.494	252.29
19	6.7365	224.32	7.7004	100.10	256.42
20	6.8599	228.43	7.8206	101.66	260.42

<sup>\*1</sup>  $\sigma_s=33.3\text{m}$  <sup>\*2</sup>  $\sigma_s=13.0\text{m}$

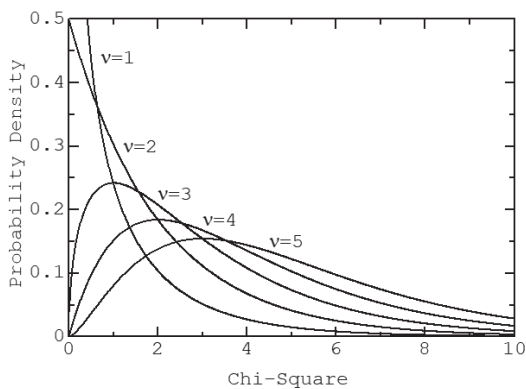


図2 カイ二乗分布の確率密度関数

いて重みを決定することができる。

### 3.2. スレッシュホールドの決定

統計量  $D$  と比較されるスレッシュホールド  $T$  は、誤警報確率により次のように定める。

すべての衛星が正常な状態を仮定すると、あるスレッシュホールド  $T$  を定めたとき、式 (8) の統計量  $D^2$  がスレッシュホールドを超えると異常衛星があるものと判断され、誤警報 (false alarm) を生じる。擬似距離の測定誤差が正規分布  $N(0, \sigma_s^2)$  に従うものとする、統計量  $D^2$  は自由度  $n-4$  のカイ二乗分布 (chi-square distribution, 付録を参照) に従う。自由度  $\nu$  のカイ二乗分布の確率密度関数

(PDF : probability density function)  $f_\chi(x|\nu)$  を図示すると図2の通りであり、あらかじめ定められた誤警報確率  $P_{fa}$  のもとで、

$$\int_{T^2}^{\infty} f_\chi(x|n-4) dx = P_{fa} \quad (10)$$

となる  $T$  を求めることができる。

スレッシュホールド  $T$  は衛星数  $n$  の関数となり、例えば DO-208 及び DO-229/316 準拠の GPS/RAIM 受信機で用いられる値は表3の通りとなる (重み行列  $W$  は式 (9) による。DO-229/316 では  $\sigma_s$  について具体的な規定はないが、ここでは [18] を参考に 13.0 m とした)。衛星数  $n$  が増えると、自由度が大きくなることからスレッシュホールドが上がることを注意する。一方、衛星数が増えると同じ大きさの距離誤差であっても式 (3) による推定位置  $\hat{x}$  に対する影響が小さくなるから、スレッシュホールドが上がるからといって安全性が低下するわけではない (3.5 節の議論も参照のこと)。

DO-208 受信機の場合は  $\sigma_s$  が固定されているため、統計量を

$$D'^2 = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} \quad (11)$$

として、スレッシュホールド

$$T'^2(n) = \sigma_s^2 \cdot T^2(n) \quad (12)$$

表 4 警報限界と ARP の上限値

飛行フェーズ	警報限界 HAL [m]	ARP 上限値 (ARP <sup>ceil</sup> ) [m]		
		$n = 5$	$n = 6$	$n \geq 7$
航空路	3704	2159	2262	2262
ターミナル	1852	1077	1135	1135
非精密進入	556	328	339	352

との比較により処理をするものが多い。表 3 には、式 (12) によるスレッショルドも併記してある。

### 3.3. 位置誤差との関係

検出器により異常が検出されていない状況であっても、GNSS による位置情報には誤差が含まれている。このとき、警報がないままに測位誤差が警報限界を超える確率を一定水準以下に抑える必要があり、完全性に直接関係するこの確率を未検出確率 (missed detection probability) という。

警報がない場合は、異常は検出されていない。警報限界は、この場合における最大の位置誤差より小さく設定することはできない。擬似距離の測定誤差と残差の関係が式 (7) で与えられているので、異常が検出されていない状況におけるある衛星  $i$  の擬似距離誤差の最大値は次式となる (このとき他の衛星については誤差が 0 と仮定されている)。

$$PR_{max}(i) = \frac{\sigma_i \cdot T(n)}{\sqrt{S_{ii}}} = \frac{T'(n)}{\sqrt{S_{ii}}} \quad (13)$$

擬似距離誤差とユーザ位置誤差の関係は式 (3) で表されることから、衛星  $i$  の擬似距離に測定誤差  $PR_{max}(i)$  が含まれているとき、水平方向に

$$\begin{aligned} dH(i) &= \sqrt{A_{1,i}^2 + A_{2,i}^2} \cdot PR_{max}(i) \\ &= \sqrt{\frac{A_{1,i}^2 + A_{2,i}^2}{S_{ii}}} \cdot T'(n) \end{aligned} \quad (14)$$

の測位誤差を生じる。すべての衛星について同一の測距精度が想定されているものとする、 $\sigma_i = \sigma_s, \forall i = 1, \dots, n$  である。このとき、 $T'(n)$  に対する係数の最大値を

$$SLOPE_{max} = \max_i \left( \sqrt{\frac{A_{1,i}^2 + A_{2,i}^2}{S_{ii}}} \right) \quad (15)$$

と表すと、水平方向の誤差の最大値 ARP (approximate radial-error protected) を

$$ARP = \max_i dH(i) = SLOPE_{max} \cdot T'(n) \quad (16)$$

と計算できる [12]-[14]。TSO-C129 規格に準拠した受信機は、この ARP を用いて航法システムとしての利用の

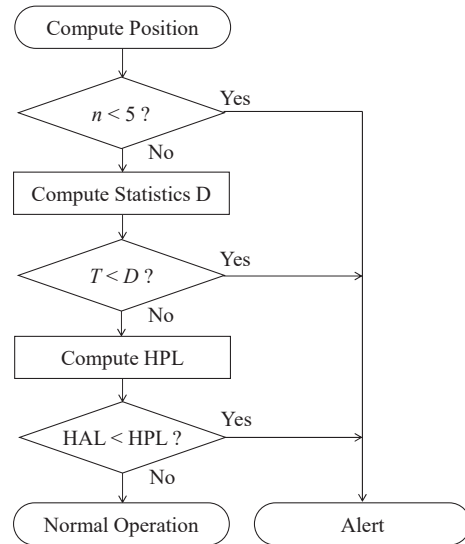


図 3 警報の有無の決定

可否を判断するものも少なくない。いくつかの航法モードにおいて GPS/RAIM が利用可能となる ARP の上限 (ARP<sup>ceil</sup>) を、表 4 に示す。

### 3.4. 保護レベルの算出 (その 1)

ARP は異常衛星が検出されない場合の水平測位誤差の最大値を与えようとするものであるが、実際にはかなり小さめの値となることが知られている。これは、ARP はいずれか一つの衛星のバイアス誤差とそれによる測位誤差の関係のみから計算されているため、それ以外の衛星の擬似距離の分散に起因する測位誤差が考慮されていないことによる。すなわち、実際にはすべての衛星の擬似距離が分散をもつから、異常衛星が検出されない場合の測位誤差の最大値は ARP よりも大きくなる。この点を考慮した指標として、保護レベルが考えられた。

式 (3) による解の共分散行列を

$$C = (G^T \cdot W \cdot G)^{-1} \quad (17)$$

と書くと、水平方向の誤差となる成分は

$$HRMS = \sqrt{C_{11} + C_{22}} \quad (18)$$

となる。これを用いて、

$$HPL = ARP + K \cdot HRMS \quad (19)$$

としたものを、水平保護レベル (HPL : horizontal protection level) という [16][17]。

ここで現れた定数  $K$  は測距誤差の分散成分に起因する測位誤差の大きさをあらわす  $HRMS$  に乗じられているが、これは実際の測位誤差が (統計量がスレッシュホールド以下であるにもかかわらず)  $HPL$  を超える未検出確率に関係している。 $K$  を大きくすると測距誤差の分散成分による影響を受けにくくなることから未検出確率は減少し、逆に  $K$  を小さくすると未検出確率が増加する。すなわち、GPS/RAIM においては、あるスレッシュホールド  $T$  のもとで未検出確率を決めることにより設定可能な警報限界の最小値が求められる。これは言い換えれば異常衛星が検出されない場合の (未検出確率  $P_{md}$  のもとの) 測位誤差の最大値といえる。

測位誤差については正規分布を想定するから、未検出確率を  $P_{md} = 0.001$  とすると  $K = 3.09$  となり、

$$\begin{aligned} HPL &= ARP + K \cdot HRMS \\ &= SLOPE_{max} \cdot T'(n) + 3.09 \cdot HRMS \end{aligned} \quad (20)$$

と計算できる。この場合の  $HPL$  は、 $ARP$  の 1.7 倍程度となることが知られている [13][14]。

$HPL$  は異常衛星が検出されない場合の測位誤差の最大値であるから、警報限界と直接比較できる。航法モードに対応する警報限界は表 4 に示されているが、 $HPL$  が警報限界以下であれば、対応する航法モードにおいて GPS/RAIM を利用可能と判断できる。2.2 節で整理した GPS/RAIM を利用すべきでない条件 (i) ~ (iii) に照らすと、GPS/RAIM における警報の有無は図 3 の通り整理できる。なお、 $HPL$  に対応させて、水平方向の警報限界を水平警報限界 (HAL : horizontal alert limit) という。

式 (20) の  $SLOPE_{max}$  による表現では、すべての衛星について同一の測距精度が仮定されている。衛星により異なる測距精度を想定して重み行列を使う場合は、式 (13) 及び (14) より

$$HPL = \max_i \sqrt{\frac{A_{1,i}^2 + A_{2,i}^2}{S_{ii}}} \sigma_i \cdot T(n) + 3.09 \cdot HRMS \quad (21)$$

と計算できる [15]。

$ARP$  及び保護レベルの算出には擬似距離は必要とされないことを注意する。すなわち、 $ARP$  及び保護レベルは、誤警報確率、未検出確率及び各衛星の測距精度と

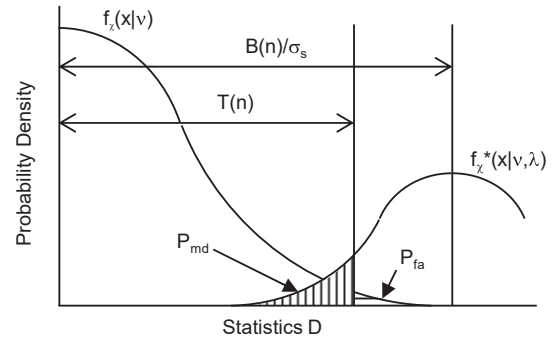


図 4 統計量  $D$  の確率分布

いった固定パラメータのほかは衛星数及び受信機と衛星の相対的位置関係により決まり、現実に測定された擬似距離は反映しない。例えば電離圏伝搬遅延により大きな測距誤差が生じていたとしても、そのことは  $ARP$  及び保護レベルには直接には反映されず、想定されている測距精度に適切に織り込まれているか否かが問題となる。

### 3.5. 保護レベルの算出 (その 2)

異常の有無に応じた統計量  $D$  の確率分布を図示すると、図 4 のようになる。左側の山は異常がない場合であり、統計量  $D$  がカイ二乗分布  $f_x(x|v)$  に従うことを用いると、式 (10) により誤警報確率  $P_{fa}$  の関数としてスレッシュホールド  $T$  が決まる。

一方、図 4 の右側の山はいずれか 1 機の衛星に異常がある場合に対応する。この場合の統計量  $D$  は、自由度  $v$ 、非心パラメータ  $\lambda$  の非心カイ二乗分布 (noncentral chi-square distribution, 付録を参照) に従うこととなり、その確率密度関数  $f_x^*(x|v, \lambda)$  を用いれば、与えられたスレッシュホールド  $T$  及び未検出確率  $P_{md}$  に対して、

$$\int_0^{T^2} f_x^*(x|n-4, \lambda) dx = P_{md} \quad (22)$$

を満たす非心パラメータ  $\lambda$  を求めることができる [17][18]。非心パラメータ  $\lambda$  が大きくなると、確率密度関数  $f_x^*(x|v, \lambda)$  は  $X$  軸の正の方向に移動する。

$n$  機のうちいずれか 1 機の衛星に異常があり、擬似距離の残差にバイアス  $B$  を生じているものとする、非心パラメータ  $\lambda$  との関係は

$$B(n) = \sigma_s \sqrt{\lambda} \quad (23)$$

となる。バイアス  $B$  は衛星数  $n$  の関数となり、衛星数  $n$  の増加に伴い大きくなる。バイアス  $B$  よりも小さな残差の未検出確率は  $P_{md}$  を超えてしまう。すなわち、式 (23) は、スレッシュホールド  $T$  が与えられた場合の検出可能なバイアスの最小値を表している。

衛星数  $n$  に対応する検出可能なバイアス  $B$  を計算す

表 5 衛星数と検出可能なバイアスの関係

衛星数 $n$	$P_{fa}=6.667 \times 10^{-5}$ (DO-208)		$P_{fa}=3.33 \times 10^{-7}$ (DO-229/316)		
	$\sqrt{\lambda}$ [m]	$B(n)$ [m] <sup>*1</sup>	$\sqrt{\lambda}$ [m]	$B(n)$ [m] <sup>*2</sup>	$B(n)$ [m] <sup>*1</sup>
5	7.0781	235.71	8.1940	106.53	272.86
6	7.3883	246.03	8.4788	110.23	282.35
7	7.6091	253.39	8.6877	112.94	289.30
8	7.7880	259.35	8.8600	115.18	295.04
9	7.9414	264.45	9.0093	117.13	300.01
10	8.0770	268.97	9.1426	118.86	304.45
11	8.1994	273.04	9.2637	120.43	308.49
12	8.3116	276.78	9.3753	121.88	312.20
13	8.4154	280.24	9.4791	123.23	315.66
14	8.5124	283.47	9.5764	124.50	318.90
15	8.6035	286.50	9.6682	125.69	321.95
16	8.6896	289.37	9.7552	126.82	324.85
17	8.7713	292.09	9.8379	127.90	327.61
18	8.8492	294.68	9.9170	128.93	330.24
19	8.9237	297.16	9.9927	129.91	332.76
20	8.9951	299.54	10.066	130.86	335.19

<sup>\*1</sup>  $\sigma_s=33.3\text{m}$  <sup>\*2</sup>  $\sigma_s=13.0\text{m}$

ると、表 5 の通りとなる。衛星数が増加すると検出可能なバイアス誤差は大きくなるが、直観的には、衛星数が増えたならばより小さな誤差であっても検出可能なように思える。こうした関係についての議論は 3.2 節と同じで、衛星が増えた場合に安全性が低下するという意味ではない。

さて、バイアス  $B$  に対応する衛星  $i$  の擬似距離誤差は次のように求められる [18]。

$$PR_{max}^*(i) = \frac{B(n)}{\sqrt{S_{ii}}} = \frac{\sigma_i \sqrt{\lambda}}{\sqrt{S_{ii}}} \quad (24)$$

式 (13) との違いは、異常を生じていない衛星の擬似距離に含まれる分散 (式 (19) の右辺第二項) が考慮されていることである。これより得られる水平測位誤差の最大値は

$$\begin{aligned} HPL &= \max_i \sqrt{A_{1,i}^2 + A_{2,i}^2} \cdot PR_{max}^*(i) \\ &= \max_i \sqrt{\frac{A_{1,i}^2 + A_{2,i}^2}{S_{ii}}} \cdot B(n) \end{aligned} \quad (25)$$

となり、これをやはり水平保護レベル HPL という [18]。これは未検出確率が  $P_{md}$  となる最大のユーザ位置誤差であり、これよりも大きな位置誤差は統計量  $D$  がスレッシュホールド  $T$  を超えることで検出できる (このときの未

検出確率は  $P_{md}$  以下となる)。重み行列を使う場合は、

$$HPL = \max_i \sqrt{\frac{A_{1,i}^2 + A_{2,i}^2}{S_{ii}}} \sigma_i \cdot \sqrt{\lambda} \quad (26)$$

として HPL を求められる。

式 (25) 及び (26) による保護レベルは、前節の式 (19) 及び (21) とは異なる結果になることを注意する。これは、各衛星の異常の有無によらない測距誤差の分散成分について、前者では統計量に対して独立に影響するものとして取り扱われているのに対して、後者では水平位置誤差の共分散として互いに関連をもつものとされている違いによる。これは考え方の違いであって、どちらが優れているということではなく、両者による保護レベルの大小関係は衛星の配置による。

### 3.6. FDE 方式

前節までに述べた RAIM 方式は異常衛星があることを検出するもので、 $n$  機の衛星のうちのどれに異常があるのかを特定することはできない。すなわち RAIM-FD 方式であった。異常が検出された場合にその原因となっている衛星を特定し、これを除外することで GPS/RAIM による航法を継続しようとする方式を RAIM-FDE という。RAIM-FDE の具体的な内容は規格化されていないが、代表的な方式は次の通りである [16]。

$n$  機の衛星のうちの衛星  $k$  を除外して計算された統計

表 6 保護レベルの計算条件

項目	設定値
対象期間	2021年1月17日～23日 (GPS Week 2141)
時間間隔	30秒
衛星数	31 GPS
対象地点	(1) 新千歳空港 (CTS) (42.77528N 141.69250E) (2) 羽田空港 (HND) (35.55333N 139.78111E) (3) 那覇空港 (OKA) (26.19583N 127.64583E)

表 7 受信機に関する想定

項目	受信機タイプ			
	1	2	3	4
準拠規格	DO-208	DO-208	DO-229	DO-229
FD/FDE	FD	FD	FDE	FDE
$\sigma_s$ [m]	33.3	33.3	13	6.5
重み付け	なし	なし	なし	あり
保護指標	ARP Eq. (16)	HPL Eq. (25)	HPL Eq. (25)	HPL Eq. (26)
保護指標 の上限 [m]	328 ~ 352	556	556	556

量  $D$  を、 $D(k)$  と書くことにする。RAIM-FD により、 $D > T(n)$  のとき、異常な衛星が検出されている。ここで、ある  $k$  について

$$D(k) \leq T(n-1), \exists k = 1, \dots, n \quad (27)$$

であり、かつ

$$D(j) > T(n-1), \forall j \neq k \quad (28)$$

ならば、異常を生じているのは衛星  $k$  であるものと判別できる。衛星  $k$  を除外して統計量を計算した場合には異常が検出されない一方、衛星  $k$  を含めた場合には異常が検出されているからである。

RAIM-FDE は一般にはこのような仕組みにより異常衛星を特定して除外する。除外した結果、依然として式 (27) 及び (28) を満たす衛星があれば、同様の処理を繰り返す。 $n = 5$  の場合は衛星  $k$  を除外した場合に  $D(k)$  を計算できないから、RAIM-FDE を実行するためには6機以上の衛星が必要となる。

異常が検出されない場合は、すべての  $k$  について

$$D(k) \leq T(n-1), \forall k = 1, \dots, n \quad (29)$$

となっている。このとき、測位誤差の最大値は  $k = 1, \dots,$

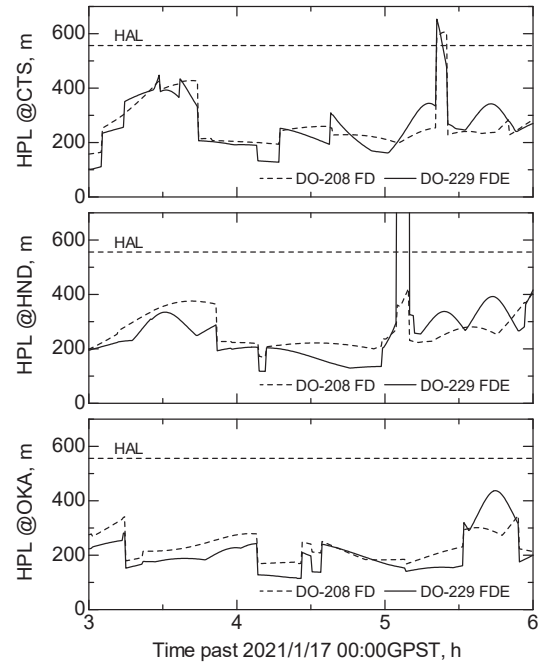


図 5 保護レベルの試算例

$n$  に対応した保護レベルの最大値で与えられる。すなわち、衛星  $k$  を除外して計算された保護レベルを  $HPL(k)$  と書くことにすると、RAIM-FDE の保護レベルは次のように求められる。

$$HPL = \max_k HPL(k) \quad (30)$$

#### 4. 性能評価例

RAIM により得られる完全性の監視性能を把握するために、TSO-C129/145/146/196 受信機を想定して保護レベル及びアベイラビリティを評価するとともに、実際の障害発生時の応答を試算した。

##### 4.1. 保護レベル及びアベイラビリティ

まず、保護レベルの計算条件を表 6 に示す。受信機については表 7 の 4 種類を想定した。受信機 4 ではさまざまな重み付けの方式が考えられるが、ここでは簡単に

$$\sigma_i = \frac{\sigma_s}{\sin E_i} \quad (31)$$

によることとした。 $E_i$  は衛星  $i$  の仰角である。

表 7 における受信機 2 及び受信機 3 について、保護レベルを計算した例を図 5 に示す。可視衛星数の増減によるステップ状の変化と衛星の移動に応じたなめらかな変化がみられる。

GPS/RAIM の利用の可否は、警報の有無により決まる。警報がなく GPS/RAIM を利用できる条件は、衛星数が 5 以上であること及び異常衛星が検出されていないこと

表 8 準拠規格別のアベイラビリティ試算結果

受信機タイプ	準拠規格	$\sigma_s$ [m]	ARP <sup>ceil</sup> or HAL [m]	仰角マスク [deg]	アベイラビリティ [%]		
					新千歳空港	羽田空港	那覇空港
1	DO-208 RAIM-FD	33.3	328 ~ 352	5	100	100	100
				7.5	99.68	100	100
				10	99.44	98.02	100
2	DO-208 RAIM-FD	13	556	5	100	100	100
				7.5	99.68	100	100
				10	99.32	97.89	100
3	DO-229/316 RAIM-FDE	13	556	5	99.28	99.04	100
				7.5	98.14	98.55	100
				10	94.22	93.87	98.72
4	DO-229/316 RAIM-FDE (重みあり)	6.5	556	5	98.25	98.53	99.47
				7.5	96.80	98.06	99.33
				10	94.52	94.24	98.02

と、ARP を用いる受信機 1 については

$$ARP \leq ARP^{ceil} \quad (32)$$

その他の受信機は保護レベルにより

$$HPL \leq HAL \quad (33)$$

である (図 3 に整理した通りである。ただし、受信機 1 は HPL の代わりに ARP を用いる)。計算対象期間 (1 週間) のうち、GPS/RAIM を利用できる時間割合をアベイラビリティとして算出すると、表 8 の通りとなった。

傾向としては、那覇においてアベイラビリティが比較的高いことが分かる。日本においては一般に南西諸島において電離圏の影響を受けやすいが、RAIM ではそのような事情は反映されず、前述のように可視衛星数及びその配置により保護レベルが計算されることによる。

また、DO-229 受信機よりもむしろ DO-208 受信機のほうがアベイラビリティは良好であることが分かる。これは、保護レベルを計算する際の係数の違いのほか、DO-229 受信機では FDE 方式によるため、式 (30) において保護レベルが大きめに計算されることによる。

#### 4.2. 障害発生時の応答

次に、RAIM により完全性が確保されることを確認するために、障害発生時の応答を試算した。試算の対象としては実際に擬似距離に誤差を生じた例を選ぶ必要があることから、[20] を参考に表 9 の 2 例とした。

実際のデータから統計量  $D$  を求めるため、IGS (International GNSS Services) の kgni 局の観測データを使用した [21]。受信機は ASHTECH Z-XII3 であり、東京都小金井市の NICT (情報通信研究機構) に設置され

表 9 障害発生例

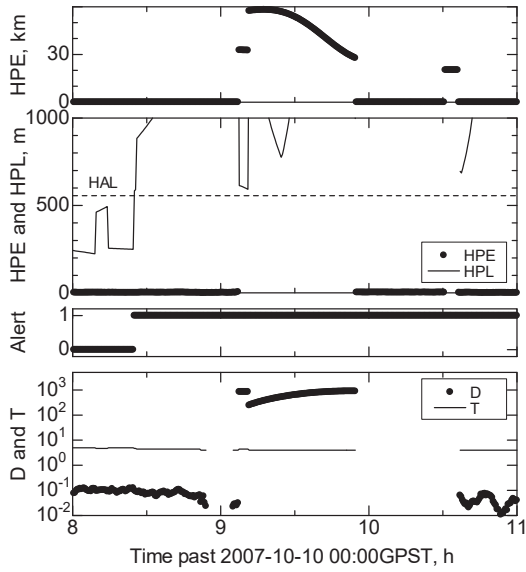
事例	事例 1	事例 2
NANU ID	2007129	2005161
発生日時	2007-10-10 08:24	2005-12-25 21:06
復旧日時	2007-10-10 10:30	2006-01-24 16:21
衛星	SVN51 (PRN20)	SVN25 (PRN25)
距離誤差	48 km [20]	2.05 km [20]
観測データ	IGS kgni 受信機: ASHTECH Z-XII3 (NICT, 東京都小金井市)	

ている。

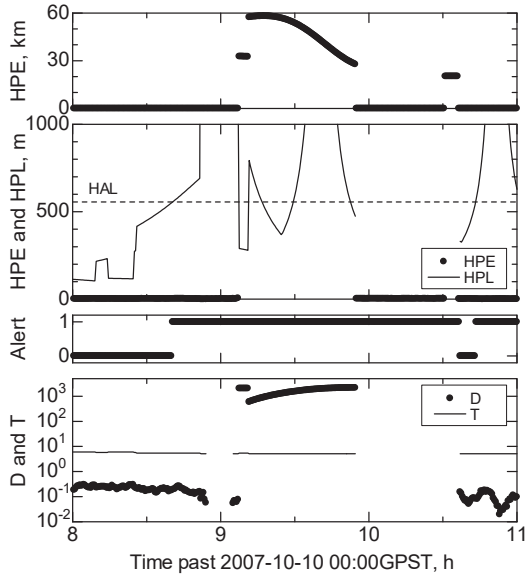
試算結果を図 6 及び図 7 に示す。各図の最上段には水平位置誤差を表示してあり、受信機は固定されているから障害がなければ 0 付近になるはずであるが、障害に伴って大きな位置誤差を生じていることが分かる。両図の第 2 段には水平測位誤差 (HPE) と水平保護レベル (HPL) の比較を、第 3 段には前節と同様の計算による警報の有無 (0 は警報なし、1 は警報状態) を、最下段には統計量  $D$  とスレッショルド  $T$  の比較を表示してある。

事例 1 (図 6) では 60 km 近い測位誤差が観測されている。このとき統計量  $D$  はスレッショルド  $T$  を超えており、擬似距離の異常が検出されている。警報がないままで測位誤差が保護レベルを超えることはなかった。なお、水平保護レベル及びスレッショルド  $T$  が欠落している部分は、衛星数の不足により RAIM 方式の計算ができなかった。

一方、より小さな擬似距離誤差を生じた事例 2 (図 7)



(a) DO-208 (受信機タイプ 2)



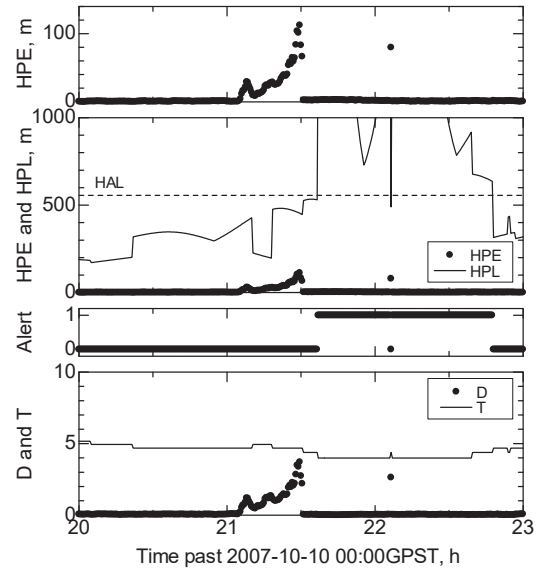
(b) DO-229 (受信機タイプ 3)

図 6 障害発生時の応答例 (事例 1)

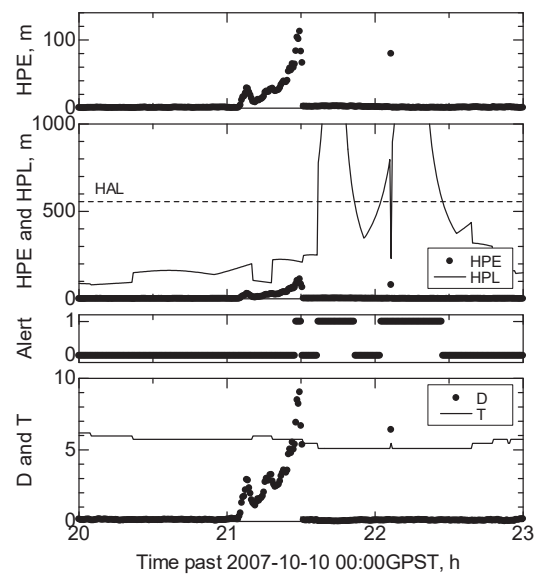
では、DO-208 受信機において統計量  $D$  がスレッシュホールドを超えず異常衛星は検出されなかった（警報状態は保護レベルが警報限界を超えたことによる）。DO-229 受信機では異常衛星が検出されているが、事例 1 と比べると応答が遅く、112 m 以上の位置誤差を生じることとなった。ただし、いずれの場合も測位誤差が保護レベルを超えることはなく、保護レベルは正常に機能していることが分かる。

## 5. むすび

ICAO により規定されている補強方式のうち、ABAS



(a) DO-208 (受信機タイプ 2)



(b) DO-229 (受信機タイプ 3)

図 7 障害発生時の応答例 (事例 2)

については RAIM として実装されているが、国際標準では具体的な処理方式が定められているわけではない。このため、ABAS の性能評価を可能とするため、搭載用受信機が実装している RAIM 方式についてベースラインとなるアルゴリズムを調査・整理した。

調査結果にもとづいて搭載用受信機を想定して保護レベル及びアベイラビリティを評価した。さらに実際の障害発生時の応答を試算したところ、準拠規格により警報の有無が異なることはあるが、いずれの場合も保護レベルを含む完全性機能は正常に機能することを確認した。

## 参考文献

- [1] Aeronautical Telecommunications, Annex 10 to the Convention on International Civil Aviation, International Standards and Recommended Practices, 7th ed., ICAO, July 2018.
- [2] Airborne Supplemental Navigation Equipment Using the Global Positioning System (GPS), TSO-C129a, FAA, Feb. 20, 1996.
- [3] Airborne Navigation Sensors Using the Global Positioning System (GPS) Augmented by the Wide Area Augmentation System (WAAS), TSO-C145a, FAA, Sept. 19, 2002.
- [4] Stand-Alone Airborne Navigation Equipment Using the Global Positioning System (GPS) Augmented by the Wide Area Augmentation System (WAAS), TSO-C146a, FAA, Sept. 19, 2002.
- [5] Airborne Supplemental Navigation Sensors for Global Positioning System Equipment Using Aircraft-Based Augmentation, TSO-C196, FAA, Sept. 21, 2009.
- [6] Ground Based Augmentation System Positioning and Navigation Equipment, TSO-C161, FAA, May 30, 2003.
- [7] B. Roturier, E. Chatre, and J. Ventura-Traveset, "The SBAS integrity concept standardised by ICAO: application to EGNOS," Proc. GNSS 2001 Conference, 5th European Symposium, Seville, Spain, May 2001.
- [8] Minimum Operational Performance Standards for Airborne Supplemental Navigation Equipment Using Global Positioning System (GPS), DO-208, Change 1, RTCA, Sept. 21, 1993.
- [9] Minimum Operational Performance Standards for Global Positioning System/Wide Area Augmentation System Airborne Equipment, DO-229, Rev.F, RTCA, June 11, 2020.
- [10] Minimum Operational Performance Standards for Global Positioning System/Aircraft-Based Augmentation System Airborne Equipment, DO-316, RTCA, April 14, 2009.
- [11] B. Parkinson and P. Axelrad: "Autonomous GPS Integrity Monitoring Using the Pseudorange Residual", Journal of the Institute of Navigation, Vol.35, No. 2, pp.255-274, Summer 1988.
- [12] R. Brown, G. Chin, and J. Kraemer: "Update on GPS Integrity Requirements of the RTCA MOPS", Proc. 4th Int'l Tech. Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS), pp.761-772, Albuquerque, NM, Sept. 1991.
- [13] R. Brown: "A Baseline GPS RAIM Scheme and a Note on the Equivalence of Three RAIM Methods", Journal of the Institute of Navigation, vol.39, no. 3, pp.301-316, Fall 1992.
- [14] G. Chin, J. Kraemer, and R. Brown: "GPS RAIM: Screening Out Bad Geometries Under Worst-Case Bias Conditions", Journal of the Institute of Navigation, vol.39, no. 4, pp.117-137, Winter 1992-93.
- [15] T. Walter and P. Enge: "Weighted RAIM for Precision Approach", Proc. 8th Int'l Tech. Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS), pp.1995-2004, Palm Springs, CA, Sept. 1995.
- [16] Y. Lee, K. Dyke, B. DeCleene, J. Studenny, and M. Beckman: "Summary of RTCA SC-159 GPS Integrity Working Group Activities", Journal of the Institute of Navigation, vol.43, no. 3, pp.307-338, Fall 1996.
- [17] R. Brown and G. Chin: "GPS RAIM: Calculation of

Threshold and Protection Radius Using Chi-Square Methods – A Geometric Approach", Global Positioning System: Papers published in Navigation, vol. V, pp.155-178, 1998.

- [18] T. Murphy, and M. Harris: "RAIM Performance in the Post SA Era", Proc. 21st Int'l Tech. Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS), pp.139-150, Savannah, GA, Sept. 2008.
- [19] S. Pullen: "GNSS Integrity and Receiver Autonomous Integrity Monitoring (RAIM)", Position, Navigation, and Timing Technologies in the 21st Century: Integrated Satellite Navigation, Sensor Systems, and Civil Applications, ed. J. Morton et al., vol.1, pp.591-617, John Wiley & Sons, Inc., 2021.
- [20] L. Heng, G. Gao, T. Walter, and P. Enge: "GPS Signal-in-Space Integrity Performance Evolution in the Last Decade", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol.48, no.4, pp.2932-2946, Oct. 2012.
- [21] Products, IGS, <https://www.igs.org/products> (2021年11月6日参照)

## 付録 カイ二乗分布

確率変数  $x_i, i = 1, \dots, n$  が, それぞれ互いに独立で, 平均  $\mu_i$ , 分散  $\sigma_i$  の正規分布に従うとき, 統計量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (34)$$

は自由度  $\nu$  のカイ二乗分布に従う。自由度  $\nu$  は確率変数  $x_i, i=1, \dots, n$  のうち独立とみなせるものの数であって, たとえば式 (8) では 4 個の未知数を推定した後の残差を取り扱うため自由度は  $\nu = n - 4$  となる。

カイ二乗分布の確率密度関数は,

$$f_x(x|\nu) = \frac{x^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2} \cdot \Gamma(\nu/2)} \cdot e^{-x/2} \quad (35)$$

また累積分布関数 (CDF: cumulative distribution function) は,

$$F_x(x|\nu) = \int_0^x f_x(t|\nu) dt = \frac{\gamma(\nu/2, x/2)}{\Gamma(\nu/2)} \quad (36)$$

で与えられる (ただし  $x > 0$ )。  $\Gamma(a)$  はガンマ関数,  $\gamma(a, x)$  は不完全ガンマ関数である。式 (10) の計算には,

$$\int_0^\infty f_x(t|\nu) dt = 1 - F_x(x|\nu) \quad (37)$$

の関係を利用できる。

一方, 統計量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (38)$$

は, 自由度  $\nu$  及び非心パラメータ  $\lambda$  をもつ非心カイ二乗分布に従う。非心パラメータ  $\lambda$  は, 確率変数  $x_i$  の平均  $\mu_i$  及び分散  $\sigma_i^2$  と次の関係にある。

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (39)$$

非心カイ二乗分布の確率密度関数は、

$$f_x^*(x|v, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda/2}}{i!} \cdot \left( \frac{\lambda}{2} \right)^i \cdot f_x(x|v+2i) \quad (40)$$

で与えられる (ただし  $x > 0$ )。カイ二乗分布は、非心カイ二乗分布で  $\lambda=0$  とした特別な場合に対応することがわかる。また、累積確率密度関数は、カイ二乗分布の累積確率密度関数を用いて

$$\begin{aligned} F_x^*(x|v, \lambda) &= \int_0^x f_x^*(t|v, \lambda) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda/2}}{i!} \cdot \left( \frac{\lambda}{2} \right)^i \cdot F_x(x|v+2i) \end{aligned} \quad (41)$$

として求められる。

さて、カイ二乗分布の確率密度関数を表す式(35)には、ガンマ関数

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} dt \quad (42)$$

が現れる。ガンマ関数は階乗が一般化されたものであり、その計算にあたっては以下の性質を用いることができる。

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x \cdot \Gamma(x) \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (43)$$

ただし、 $x > 0$  は実数、 $n$  は任意の自然数である。

式(36)の分子にある第一種不完全ガンマ関数 (lower incomplete gamma function)  $\gamma(a, x)$  には

$$\begin{aligned} \gamma(a+1, x) &= a \cdot \gamma(a, x) - x^a \cdot e^{-x} \\ \gamma(1, x) &= 1 - e^{-x} \\ \gamma(1/2, x) &= \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\sqrt{x}) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad (44)$$

といった性質があり、次の級数展開により計算できることが知られている。

$$\gamma(a, x) = x^a \cdot e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1+n)} \cdot x^n \quad (45)$$



#### 坂井 文泰

1996年早稲田大学大学院修士了。同年運輸省電子航法研究所入所、衛星航法システムによる航空航法の研究に従事。現在、航法システム領域副領域長。2002～2003年米国スタンフォード大学客員研究員、2013年ミュンヘン連邦軍大学客員研究員、2014～2018年宇

宙航空研究開発機構主幹研究開発員。2006年IEEE AES優秀論文賞、2007年米国航法学会ION GNSS優秀論文賞。米国航法学会、日本航空宇宙学会、日本航海学会、測位航法学会各会員。東京海洋大学客員教授。博士(工学)。

(令和4年1月12日受付、令和4年4月26日再受付)